Théorème de Stampacchia.

[Bré V.3]

Thm : Soit H un espace de Hilbert. Soit $a : H\times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue coercive ($\forall u\in H, a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2, \alpha\in \mathbb{R}_+^*$).
Soit K convexe fermé non vide de H.

$\forall \varphi \in H', \exists! u\in K, \forall v\in K, a(u, v-u) \geq \varphi(v-u)$.

Si a est de plus symétrique, alors u se caractérise par $u\in K$ et $\min_{v\in K} J(v) = J(u)$ où $J(u) = \frac{1}{2} a(u,u) - \varphi(u)$.

· Soit $\varphi \in H'$. Par Riesz, $\exists! f\in H, \forall v\in H, \varphi(v) = \langle f, v\rangle$.
Soit $u\in H$ fixé. $(v\mapsto a(u,v))\in H'$ donc de même, $\exists! A(u), a(u,\cdot) = \langle A(u), \cdot\rangle$.
La bilinéarité de a et l'unicité dans Riesz assure que A est linéaire.
De plus, $\|Au\|^2 = a(u, Au) \leq C\|u\| \|Au\|$, donc (en distinguant $Au=0$)
$\|Au\| \leq C\|u\|$. A continue.
Aussi, $\forall u\in H, \langle Au, u\rangle = a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2$.
Soit $\rho > 0$. Mq $\exists! u\in K, \forall v\in K, \langle Au, v-u\rangle \geq \langle f, v-u\rangle$
i.e. $\langle (\rho f - \rho Au + u) - u, v-u\rangle \leq 0$
i.e. par caractérisation de la projection sur K, $p_K(\rho f - \rho Au + u) = u$.
Posons alors $S : v\mapsto p_K(\rho f - \rho Av + v)$.
Puisque p_K est 1-lipschitzienne, pour $v_1, v_2\in K$:

$$\begin{aligned}\|S(v_1)-S(v_2)\|^2 &\leq \|(v_1-v_2) - \rho(Av_1 - Av_2)\|^2\\ &\leq \|v_1-v_2\|^2 - 2\rho\langle v_1-v_2, A(v_1-v_2)\rangle + \rho^2\|A(v_1-v_2)\|^2\\ &\leq \|v_1-v_2\|^2(1-2\rho\alpha+\rho^2C^2).\end{aligned}$$

Pour $0<\rho<\frac{2\alpha}{C^2}$, $1-2\rho\alpha+\rho^2C^2 < 1$ donc S est contractante sur K stable par S, complet.
S admet un unique point fixe $u\in K$, ce qui répond au problème.

Si a est maintenant symétrique, alors a définit un produit scalaire dont la norme associée $u\mapsto \sqrt{a(u,u)}$ est équivalente à $\|\cdot\|$ (par continuité et coercivité).
Ainsi (H, a) est un Hilbert et $\exists! g\in H$, $\varphi = a(g,\cdot)$.

$$\begin{cases} u\in K\\ \forall v\in K, a(u,v-u)\geq \varphi(v-u)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u\in K\\ \forall v\in K, a(g-u, v-u)\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u\in K\\ u = p_K(g) \text{ selon } a.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u\in K\\ a(g-u, g-u) = \min_{v\in K}\{a(g-v,g-v)\}.\end{cases}$$

Or $a(g-v,g-v) = a(g,g) - 2a(g,v) + a(v,v)$ minimal ssi $J(v)$ minimal d'où le résultat.